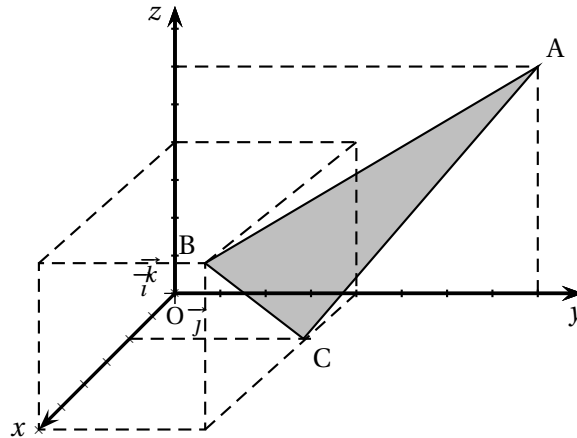


Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(0; 8; 6)$, $B(6; 4; 4)$ et $C(2; 4; 0)$.



1. a. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

- b. On a $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 6 - 8 + 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2 - 8 + 6 = 0$.

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc normal à ce plan.

- c. $M(x; y; z) \in (ABC) \iff \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Avec $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-8 \\ z-6 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff x + 2(y - 8) - (z - 6) = 0 \iff x + 2y - z - 16 + 6 = 0.$$

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff x + 2y - z - 10 = 0.$$

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0; 0; 6)$ et $(6; 6; 0)$.

- a. Un vecteur directeur de la droite (DE) est le vecteur $\vec{DE} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ou plus simplement

$$\frac{1}{6} \vec{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $M(x; y; z) \in (DE) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R} : \vec{DM} = t \times \frac{1}{6} \vec{DE}$.

Avec $\vec{DM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-6 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{6} \vec{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\vec{DM} = t \times \frac{1}{6} \vec{DE} \iff \begin{cases} x &= t \times 1 \\ y &= t \times 1 \\ z - 6 &= t \times (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= t \\ y &= t \\ z &= 6 - t \end{cases}$$

- b. On a $I(4; 4; 2)$; ce point appartient bien à la droite (DE) car ces coordonnées correspondent à la valeur $t = 4$.

3. On considère le triangle ABC.

a. On a $\|\vec{AB}\|^2 = 36 + 16 + 4 = 56$ d'où $AB = \sqrt{56}$;

De même $\|\vec{AC}\|^2 = 4 + 16 + 36 = 56$ d'où $AC = \sqrt{56}$.

$AB = AC$ donc ABC est un triangle isocèle en A.

b. I est le milieu de la base [BC] du triangle isocèle, donc (AI) est médiane et aussi hauteur du triangle. Son aire est donc égale à $\mathcal{A}(ABC) = \frac{AI \times BC}{2}$. Avec $I(4; 4; 2)$:

$$AI^2 = 4^2 + (-4)^2 + (-4)^2 = 16 + 16 + 16 = 3 \times 16 = 16 \times 3, \text{ d'où } AI = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

$$BC^2 = (-4)^2 + 0^2 + (-4)^2 = 16 + 16 = 32, \text{ d'où } BC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(ABC) = \frac{4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{6}.$$

c. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12 + 16 + 12 = 40$.

d. On a également $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

$$\text{On a donc } 40 = \sqrt{56} \times \sqrt{56} \times \cos \widehat{BAC} \iff 40 = 56 \times \cos \widehat{BAC} \iff \cos \widehat{BAC} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}.$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 44,41$, soit $44,1^\circ$ à $0,1$ près.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

En déduire la distance du point O au plan (ABC).

Si $K(x; y; z)$ est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) le vecteur \vec{OK} orthogonal au plan est donc colinéaire au vecteur \vec{n} .

$$\text{On a donc } \vec{OK} = \alpha \vec{n} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Mais K appartient au plan (ABC) : ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan; on a donc :

$$K \in (ABC) \iff \alpha + 2 \times 2\alpha - (-\alpha) - 10 = 0 \iff 6\alpha - 10 = 0 \iff 6\alpha = 10 \iff 3\alpha = 5 \iff \alpha = \frac{5}{3}.$$

Les coordonnées de K sont donc $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; -\frac{5}{3}\right)$: ce sont bien celles de H!

La distance de O au plan (ABC) est donc égale à OH.

$$OH^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} + \frac{100}{9} + \frac{25}{9} = \frac{150}{9}.$$

$$\text{Donc } OH = \sqrt{\frac{150}{9}} = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{25 \times 6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$